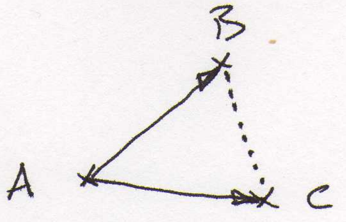
2008/2/B/4.

A(1,1,0) B(1,1,2) C(1,-1,1)

a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.



$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (0,0,2) \\ \overrightarrow{AC} = (0,-2,1)\end{array}\right\} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i}$$

$$S = \frac{1}{2}\left|4\vec{i}\right| = \frac{1}{2}\cdot 4 = \boxed{2u^2 = S}$$

Como $S \neq 0$ A, B y C no están alineados.

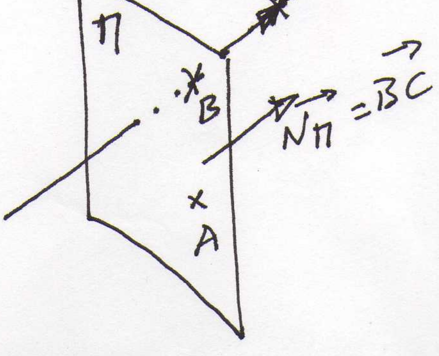
b) Si $\pi \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{N}_\pi = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = (0,-2,-1)$

$\pi \equiv 0x - 2y - 1z + D = 0$

$A \in \pi$; $A(1,1,0) \Rightarrow 0\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1\cdot 0 + D = 0; D = 2$

$\pi \equiv -2y - z + 2 = 0$; $\boxed{\pi \equiv 2y + z - 2 = 0}$



2008/3/A/4.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} A(1,-1,2) \\ \vec{v}(2,3,1) \end{cases}$$

a) $\pi \Rightarrow \begin{cases} O(0,0,0) \\ r \in \pi \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{OA} = (1,-1,2) \\ \vec{v} = (2,3,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$$\pi \equiv -x + 3z + 4y + 2z - 6x - y = -7x + 3y + 5z = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 7x - 3y - 5z = 0}$$

b) $\pi' \begin{cases} O(0,0,0) \\ r \perp \pi' \Rightarrow \vec{N}_{\pi'} = \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x + 3y + z + D = 0}$

Como $O(0,0,0) \in \pi' \Rightarrow 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 0 + D = 0;\ \underline{D=0}$

Por tanto $\boxed{\pi' \equiv 2x + 3y + z = 0}$

2008/4/A/4.

$$\begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases} \\ s &\equiv \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Pos. relativa r y s

rango A: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{rango } A = 3}$

rango A^*: $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6 \neq 0.$ $\boxed{\text{rango } A^* = 4}$

r y s se cruzan, pues no se cortan ni tienen la misma dirección.

b) Ec. general de Π, que contiene a s y es paralelo a r.

$$\Pi \equiv \begin{cases} // r \Rightarrow \vec{V_r} = \vec{N_1} \times \vec{N_2} = (1,0,0) \times (0,3,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{k} - \vec{j} = \boxed{(0,-1,3) = \vec{V_r}} \\ \text{Contiene a } s \Rightarrow \text{Calculamos } A \in s \text{ y su vector director. Para ello calculamos otro pto. } B \text{ de } s \end{cases}$$

$$s \equiv \left.\begin{array}{l} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$ Damos valores a z:

$A \rightarrow z = 1$, $y = 0$ $\quad 2x - 1 = 3 \quad 2x = 4;\ x = 2 \quad \boxed{A(2,0,1)}$

$B \rightarrow z = 3$, $y = 0$ $\quad 2x - 3 = 3 \quad 2x = 6;\ x = 3 \quad B(3,0,3)$

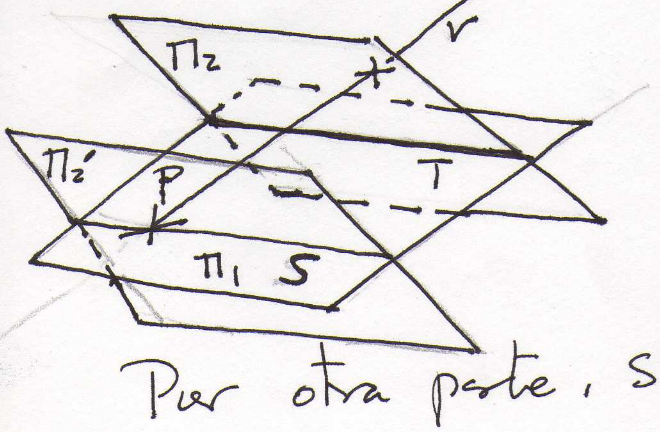
$$\boxed{\vec{V_s} = \vec{AB} = (1,0,2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A(2,0,1) \\ \vec{V_r}(0,-1,3) \\ \vec{V_s}(1,0,2) \end{array}\right\} \Pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(x-2) + 3y + (z-1) = -2x + 3y + z + 3 = 0$$

$$\boxed{\Pi \equiv -2x + 3y + z + 3 = 0}$$

2008/4/B/4 $\quad r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Pi_1 \equiv x + y + z = 0 \\ \Pi_2 \equiv y + z = 0 \end{array}$

Halla s, contenida en Π_1, $s // \Pi_2$ y que corte a r.



Si s es paralela a Π_2 y contenida en Π_1, s debe ser paralela a T, intersección de ambos en la figura.

Por otra parte, s debe contener a P, intersección de r con Π_1.

Calculemos, primero, P como intersección de la recta r y el plano π_1:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x \qquad = 1 \\ x - y \quad = 0 \end{cases} \\ \pi_1 \equiv x + y + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x = 1 \\ \longrightarrow x = y;\ y = 1 \\ \longrightarrow x + y + z = 0;\quad 1 + 1 + z = 0;\ z = -2 \end{array}$$

$$\boxed{P(1, 1, -2)}$$

Si calculemos π_2', paralelo a π_2 que pase por P: $\pi_2' \equiv \quad y + z + D = 0$; calculamos D sustituyendo las coordenadas de P: $1 - 2 + D = 0$; $\boxed{D = 1}$

$$\boxed{\pi_2' \equiv y + z + 1 = 0}$$

Podemos dar la recta s en forma general, como intersección de los planos π_1 y π_2':

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad\ y + z + 1 = 0 \end{cases}}$$

2008/5/D/4.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + 2y + bz - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + y + bz \qquad = 0 \\ \pi_3 \equiv 3x + 3y - 2z - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{ se cortan en una recta r.}$$

a) Calcular b.

Si se cortan en una recta r podemos decir que π_3 es un plano del haz generado por π_1 y π_2:

Haz $\Rightarrow$ $(x+2y+bz-1)+\lambda(2x+y+bz)=0$

$$\text{Haz} \equiv (1+2\lambda)x+(2+\lambda)y+(b+\lambda b)z-1=0$$

$$\pi_3: \; 3x+3y-2z-1=(1+2\lambda)x+(2+\lambda)y+(b+\lambda b)z-1$$

De donde:
$$\left.\begin{array}{l} 3=1+2\lambda; \\ 3=2+\lambda \\ -2=b+\lambda b \\ -1=-1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \boxed{\lambda=1} \\ \boxed{\lambda=1} \\ \lambda=1 \Rightarrow -2=2b; \; \boxed{b=-1} \\ -1=-1 \end{array}$$

Para $\lambda=1$ hemos podido calcular $b=-1$ para que, efectivamente, se corten en la recta r, eje del haz.

Alternativamente, podríamos haber obligado a que el sistema de ecuaciones formado por los 3 planos fuese compatible indeterminado $\Rightarrow$ rango $A=2$ rango $A^*=2$ y nos hubiese permitido calcular igualmente la "b".

b) Ecuaciones paramétricas de r.

Para ello necesitamos punto y vector o 2 ptos.

$$\pi_1 \equiv \begin{array}{l} x+2y-z-1=0 \\ 2x+y-z \quad\;\; =0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{I}: x+2y=z+1 \\ \text{II}: 2x+y=z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I}-2\cdot\text{II}: -x=-z+1; \; \boxed{x=z-1} \\ \text{II}-2\cdot\text{I}: -3y=-z-2; \; \boxed{y=\frac{z+2}{3}} \\ \boxed{z=z} \end{array}$$

Damos dos valores a z y calculamos 2 ptos. de la recta:

$z=1$; $x=0$ $y=1$ $A(0,1,1)$ $\overrightarrow{AB}=(3,1,3)$

$z=4$; $x=3$ $y=2$ $B(3,2,4)$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x=0+3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$